Selbstbezüglichkeit und logische Paradoxa

Lügner-Paradoxon

Dieser Satz ist falsch.

Barbier-Paradoxon

Der Barbier rasiert alle,
die sich nicht selbst rasieren.

Bibliotheks-Paradoxon

Der Bibliothekskatalog für diejenigen Bücher, die sich nicht selbst aufführen

Gödels Unvollständigkeitssätze

Was ist mit Sätzen, die ihre eigene Nicht-Beweisbarkeit konstatieren?

Hintergrund und weitere Aspekte

Als *Antinomie vom Lügner* wird eine Variante obiger Beispiele dem griechischen Philosoph Epimenides (vmtl. 5./7.Jh.v.Chr.) zugeschrieben.

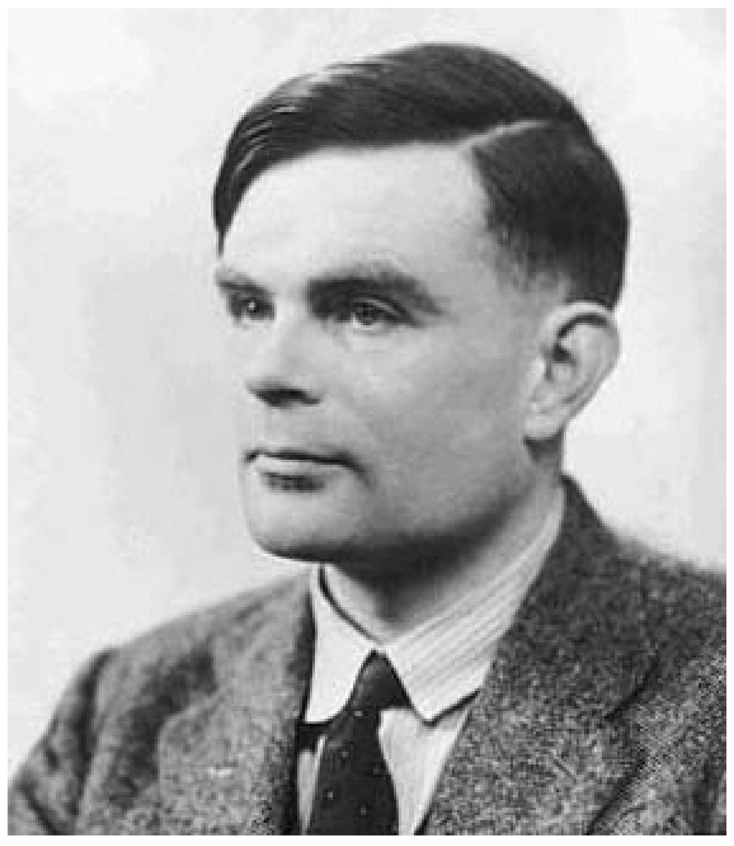
Verwandte Ideen sind mathematisch als *Diagonalisierungsargumente* nützlich: durch Selbstbezüglichkeit (i.S. einer „negativen Rückkopplung") lässt sich die Existenz bestimmter Objekte logisch ausschließen.

Während Existenzbeweise im Prinzip durch Angabe von Beispielen oder Konstruktionsbeschreibungen gegeben werden können, verlangen *Nichtexistenz-* oder *Unmöglichkeitsbeweise* andere Ideen und benutzen oft indirekte Schlüsse!

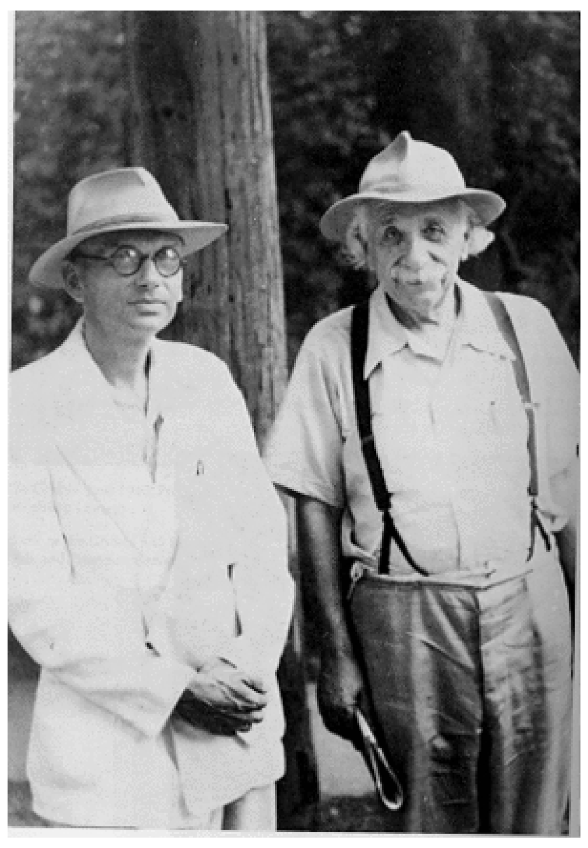
Klassische Diagonalisierungsargumente, die im Kern den obigen Beispielen ähnlich sind, belegen u.a. dass

- die Menge der reellen Zahlen überabzählbar ist (Cantor)
- nicht alle zahlentheoretischen Funktionen algorithmisch berechenbar sein können (Church–Turing)
- nicht alle wahren mathematischen Aussagen in axiomatischen Systemen formal beweisbar sein können (Gödel)

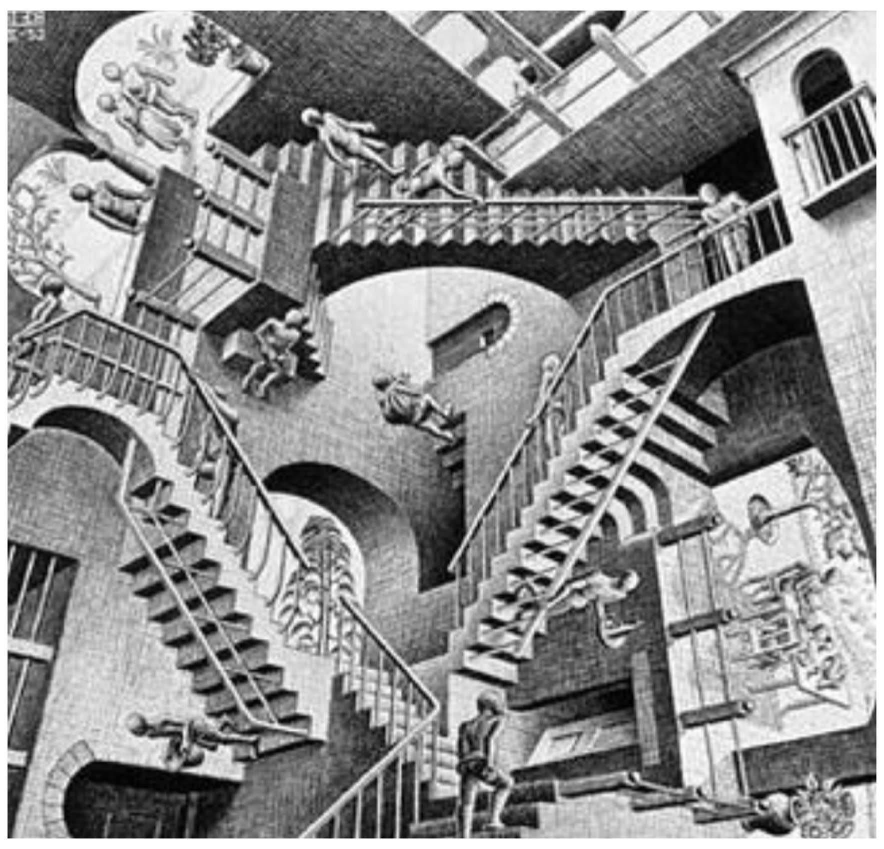
Alan Turing (1912-1954)

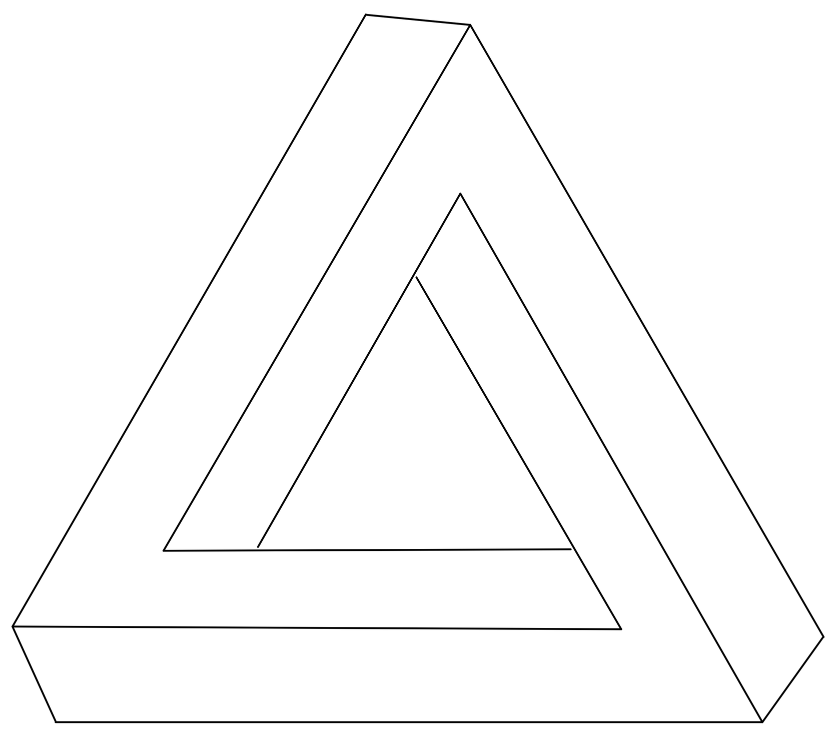


Kurt Gödel (1906-1978)



M.C. Escher: *Relativity* (1953)





weiterführende Links

Alan Turing (Wikipedia)

Das Halteproblem für Turingmaschinen, nach Alan Turing

Kurt Gödel (Wikipedia)

Gödelsche Unvollständigkeits-Sätze, nach Kurt Gödel

Gödel, Escher, Bach (Wikipedia)

Eine sehr populäre Darstellung zu verwandten Ideen findet sich in dem bekannten Buch von *Gödel, Escher, Bach* (1979) von Douglas Hofstaedter

Lange Nacht im Netz

dieses Handout

Lange Nacht der Mathematik